10.4　将函数展开成幂级数

10.4.1　泰勒级数

10.4.2　将函数展开成幂级数

10.4 将函数展开成幂级数

10.4.1 泰勒级数

上一节主要讨论幂级数的收敛域及和函数。

反问题：给定一个函数 $f(x)$, 能否找到一个幂级数，它在某区间上收敛，而其和函数恰是 $f(x)$

若能找到这样的幂级数，则称函数 $f(x)$ 在该区间上能展开成幂级数。

Taylor公式

如果函数$f(x)$在含有x_0的某开区间(a,b)内有直至$n+1$阶的导数，则对$(a，b)$内任一点x，有

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (1)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$

ξ是位于x_0、x之间的某个值。

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

若以$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ (2)近似表示 $f(x)$时，

误差为$|R_n(x)|$。

如果函数 $f(x)$ 在含有x_0的某开区间（a，b）内各阶导数都存在，则$P_n(x)$的项可无限增加, 得一幂级数:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \quad (3)$$

幂级数（3）称为函数$f(x)$的泰勒级数。

问题：

(1) 此级数是否收敛?

(2) 若收敛，和函数是否为$f(x)$?

(3) 若$f(x)$能展开幂级数是否还有其它形式?

10.4.2 将函数展开成幂级数

定理10.4.1 设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0)$内具有各阶导数, 则$f(x)$在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是$f(x)$的泰勒公式中的余项 R_n（x)当$n\to\infty$时的极限为0，即：

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (x \in U(x_0))$$

证明

函数 $f(x)$ 在$U(x_0)$上能展开成泰勒级数，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (4)$$

对一切$x\in U(x_0)$成立。

$$\Leftrightarrow s_{n+1}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \to f(x)$$

$$\Leftrightarrow R_n(x)=f(x)-s_{n+1}(x)\to 0$$

在（3）式中若取x_0=0,得：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \qquad (5)$$

级数（5）称为函数$f(x)$的麦克劳林级数。

定理10.4.2 (唯一性)

如果函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内具有任意阶导数，且在$U_\delta(x_0)$内能展开成$(x-x_0)$的幂级数，

即 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$， 则展开式唯一，

其系数 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

证明 $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在$u_\delta(x_0)$内收敛于$f(x)$,即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

逐项求导任意次,得

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots 3\cdot 2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$

令 $x=x_0$, 即得

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$ 泰勒系数

$\therefore f(x)$的关于（$x-x_0$)展开式是 $f(x)$的泰勒级数 .

函数展开成幂级数的方法和步骤

1 直接法：具体步骤如下：

（i） 求$f(x)$的各阶导数。

（ii） 求$f(x)$的各阶导数在$x=0$（$x=x_0$)处的值。

（iii） 写出$f(x)$所对应的幂级数，即麦克劳林（或泰勒）级数：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

并求出其收敛半径R。

（iv）在（$-R, R$）内考察：$\lim_{n\to\infty} R_n(x)$是否为零。

若为零，则在（$-R, R$）内有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

例1　将$f(x)=e^x$展开成x的幂级数

解 $f^{(n)}(x)=e^x\ (n=1,2\cdots)\Rightarrow f^{(n)}(0)=1\quad(n=1,2\cdots)$

得 $f(x)$ 的麦克劳林级数: $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots$

因为$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$，　它的收敛半径为$R=+\infty$

例1　将$f(x)=e^x$展开成x的幂级数

对任何有限的x,ξ　(ξ是位于 0、x之间的某个值)

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\quad \because e^{|x|}\text{有界}$$

级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$收敛，$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0 \text{ 即} \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \quad x\in(-\infty,\infty)$$

得展开式：

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

例2 将$f(x)=\sin x$展开成x的幂级数

解 $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})\qquad(n=1,2\cdots)$

得 $f(x)$ 的麦克劳林级数：

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)\cdot 2n}$，它的收敛半径为$R=+\infty$

对任何有限的x,ξ(ξ是位于 0、x之间的某个值）。

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin[\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$$

得展开式:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

注 （1）注意区别:

$f(x)$的麦克劳林级数　任意阶可导的函数都有此级数

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

将函数展开成 x的幂级数

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

（2）直接法的缺点：计算量大，余项的研究往往很困难。

2 间接法:

根据唯一性, 利用常见展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法,求展开式.

例3 将$f(x)=\cos x$展开成x的幂级数

解 $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$x \in (-\infty,+\infty)$

上式两端对x求导（右端逐项求导）得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$x \in (-\infty,+\infty)$

例4 将$f(x)=\ln(1+x)$展开成x的幂级数

解 $f'(x)=[\ln(1+x)]'=\dfrac{1}{1+x}$

$$\because \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \qquad (|x|<1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad (|x|<1)$$

将上式从0到x逐项积分:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

易知此级数的收敛域为$(-1,1]$

注：逐项积分逐项微分不改变收敛区间，但可能改变区间端点的收敛情况。

例5 将$f(x)=\arctan x$展开成x的幂级数

解 $$f'(x)=[\arctan x]'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \qquad (|x|<1)$$

将上式从0到x逐项积分：

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad (|x|\le 1)$$

$$\because \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \qquad (|x|<1)$$

例6　将$f(x)=x\ln x$在$x_0=1$处展开成幂级数

分析：展开成 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 类型

解 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\qquad x\in(-1,1]$$

$$\ln(1+(x-1))=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\qquad(-1<x-1\le 1)$$

$$(0<x\le 2)$$

$$x\ln x=(1+(x-1))\ln(1+(x-1))$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n+1}}{n}$$

例6　将$f(x)=x\ln x$在$x_0=1$处展开成幂级数

$$x\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n+1}}{n}$$

$$=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{n}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\cdots$$

$$+(x-1)^2-\frac{(x-1)^3}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n-1}(x-1)^n+\cdots$$

$$=(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}](x-1)^n$$

定义域要求！

$$=(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}(x-1)^n\qquad(0<x\le 2)$$

例6　将$f(x)=x\ln x$在$x_0=1$处展开成幂级数

$$x\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n+1}}{n}$$

$$=(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(x-1)^n}{n-1}$$

$$=(x-1)-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(x-1)^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(x-1)^n}{n-1}$$

$$=(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right](x-1)^n$$

定义域要求！

$$=(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n-1)}(x-1)^n\qquad(0<x\le 2)$$

注　应熟记下列函数的幂级数展开式:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad (|x|<1)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots \quad (-1<x\le 1)$$

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots \quad (-1\le x<1)$$

$(1+x)^{\alpha}$ ——牛顿二项展开式

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

注意: $x\in(-1,1)$

当α不是正整数时，在$x=\pm1$处收敛性与α的取值有关.

$\alpha\le-1$ 收敛区间为$(-1,1)$;

$-1<\alpha<0$ 收敛区间为$(-1,1]$;

$\alpha>0$ 收敛区间为$[-1,1]$.

当$\alpha=\frac{1}{2}$时, 有 $x\in[-1,1]$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots \frac{1}{n!}x^n + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

例7 将$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$展开成$x-1$的幂级数

分析：展开成 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 类型

解 因为$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$

$$=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}=\frac{1}{2(2+x-1)}-\frac{1}{2(4+x-1)}$$

$$=\frac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})}-\frac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$(|x|<1)$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})}-\frac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{2})^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{4})^n$$

$$=\frac{1}{2^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}-\frac{1}{2^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{2n}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})(x-1)^n$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$(|x|<1)$$

$$\begin{cases}|\frac{x-1}{2}|<1,\text{即}-1<x<3\\ |\frac{x-1}{4}|<1,\text{即}-3<x<5\end{cases}\qquad -1<x<3$$

例8 将$f(x)=\sin x$展开成$x-\dfrac{\pi}{6}$的幂级数

解 因为$\sin x=\sin[\dfrac{\pi}{6}+(x-\dfrac{\pi}{6})]$

$$=\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\cos(x-\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{6})$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-\frac{\pi}{6})^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(x-\frac{\pi}{6})^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2\cdot 2!}(x-\frac{\pi}{6})^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{6})^3+\cdots$$

$$-\infty<x<+\infty$$